

Jan Kostanjevec

pixxelpoint ●

SPREHOD PO **PROSTORU** **IZRAZLJIVOSTI**

AKSIOMA

Sprehod po prostoru izrazljivosti

Izrazljivost lahko razumemo kot pogoj izražanja. Če pogoje izražanja grobo razdelimo na formalne in materialne, spada na stran formalnih pogojev. Materialni pogoji so vezani na material izraza, tj. na snov, ki naj bi jo izrazili. Izrazljivost kot formalni pogoj pa določa meje možnih oz. izrazljivih izrazov. Tukaj torej ne gre toliko za svobodo izražanja v odnosu do zunanjih omejitev kot sta cenzura in legalnost, temveč za vprašanje odnosa med misljivim in izrazljivim.

O mejah izrazljivosti je lažje – in morda nasploh edino mogoče – govoriti po tem, ko formalno določimo sistem, katerega izrazljivost nas bo zanimala. Zato je tudi ta esej osredotočen predvsem na različne formalne sisteme in njihove izrazne zmožnosti. Izrazljivost se torej nanaša na vprašanja o tem, kaj je oziroma ni izrazljivo znotraj določenega sistema. To bi bilo v primeru naravnih jezikov, ki so konec koncev osrednji mediji izražanja, zagonetno vprašanje filozofije jezika (sem sodi denimo vprašanje normativnosti slovnice). Čeprav lahko predpostavimo, da so naravni jeziki načeloma bolj izrazljivi kot katerikoli umetni jezik ali formalni sistem, je bolj zanimivo opazovati povratno učinkovanje umetnih jezikov in formalnih sistemov nazaj na naravni jezik.

Na strani umetnih jezikov in drugih formalnih sistemov se vprašanje meje izrazljivosti postavi kot vprašanje obsega možnih pojmov danega jezika ali kot vprašanje narave njegove formalnosti. Ker umetni jeziki in formalni sistemi niso zgolj ali sploh niso sredstva komunikacije, že ta temeljna analogija lahko vodi na področje tehnologije. Bolj kot analogiziranje sámo pa je tukaj zanimiv vzorec poskusov razumevanja, razmišljanja in preseganja mej izrazljivosti na različnih področjih.

Motivacija za raziskovanje zgodovine in sodobnih premikov na področju izrazljivosti lahko poleg že omenjenega odnosa med

naravnim jezikom in formalnimi sistemi med drugim izhaja še iz zanimivosti vzorcev doseganja mej izrazljivosti in načinov, kako so bile presežene. Nadalje, za določene sisteme obstajajo dokazi, ki z eno gesto orišejo meje izrazljivosti enega ali cele vrste formalnih sistemov.

Poleg vprašanj izrazljivosti danega sistema so pomembni tudi premiki na ravni prevajanja med sistemi. Nasploh so umetni in formalni sistemi pogosto vzpostavljeni v kontekstu procesa, ki ga lahko po Carnapu imenujemo eksplikacija.¹ To je proces prevajanja ne- ali manj formalnih konceptov v formaln(ejš)e jezike. Pomenska dinamika v teh procesih je po eni strani reduktivna – pojem se zavoljo formalizacije precizira, oziroma reducira, na določen pomen. V kolikor kritiziramo neko kvantifikacijo, npr. inteligenčni kvocient, lahko zavzamemo pozicijo, da je tak proces eksplikacije odrezal preveč za previsoko ceno, ali še huje – da tako skonstruiran pojem dela neupravičljivo (epistemsko, socialno...) škodo.

Po drugi strani pa to ne izčrpa možnosti pomenske dinamike. Denimo, ravno Carnapov problem je bil, da je bila matematika verjetnosti že dovolj dobro izdelana, medtem ko je manjkal konsenz glede njene interpretacije. Se pravi, da ni bilo jasno, eksplikacija katerega pojma verjetnosti bi bila primerna za znanstveno rabo verjetnostnega računa. Izkaže se, da verjetnost lahko pomeni štetje primerov, stopnjo prepričanja ali pa fizikalno lastnost sistema (denimo meta kocke), da na dolgi rok generira določeno razmerje izidov. Vse navedene interpretacije so danes sprejete, ironično pa je Carnapova logična interpretacija verjetnosti, kjer verjetnost pomeni stopnjo podpore, ki jo premise nudijo za določen sklep, danes razmeroma marginalizirana, saj iz nje ni bilo mogoče razviti ustrezne teorije induktivne logike.²

1 Carnap svojo idejo eksplikacije najjasneje predstavi v knjigi o "logičnih temeljih verjetnosti" (Carnap 1971). Širši zgodovinski kontekst in sodobni zagovor tega pojma najdemo pri Carusu (Carus 2007).

2 Gl. npr. Gilliesov pregled klasičnih interpretacij verjetnosti (Gillies 2000).

Če stopimo korak nazaj in pogledamo skozi prizmo izrazljivosti, bi lahko kritikom inteligenčnega kvocienta predlagali še vprašanja o tem, ali je pojem inteligence sploh mogoče izraziti v matematičnem jeziku ali v standardiziranem preizkusu in kako bi sploh bil videti dokaz o taki neizrazljivosti. Podobno je za *post mortem* Carnapove logične interpretacije verjetnosti relevantno vprašanje, zakaj ni bilo mogoče vzpostaviti enotne mere za stopnjo podpore in univerzalnega sistema pravil za logično interpretacijo verjetnosti. V obeh primerih namreč obstaja nevarnost, da je izvorni pojem, ki naj bi ga v nekem smislu eksplicirali, zgolj navidezen oz. prazen in da zato ne more voditi procesa eksplikacije, kot tudi, da formalni sistemi, ki so trenutno na voljo, nimajo dovolj izrazne moči, da bi tak prevod omogočili. Prav tako imamo le redke primere, kjer je neka eksplikacija sprejeta kot dokončna.

Jasen primer dogodka v zgodovini izrazljivosti je vprašanje kvadratnega korena števila 2, oz. diagonale enotskega kvadrata. Od pitagorejcev smo dobili dokaz o iracionalnosti te dolžine, tj. dokaz, da je ni mogoče izraziti kot razmerja dveh celih števil. Po anekdoti je dokaz naletel na neodobravanje s strani nekaterih pitagorejcev, saj so bila razmerja temelj njihove metafizike in torej tudi temelj vse izrazljivosti. Tukaj vidimo očitno mejo izraznosti nekega sistema, ki smo jo kasneje premagali z vpeljavo realnih števil. Kvadratni koren iz 2, ki je ležal onkraj izrazljivosti sistema racionalnih razmerij, je bil dovolj zanimiv za nadaljnje raziskovanje in na srečo je bilo mogoče formalizacijo števil prilagoditi tako, da je bilo mogoče raziskovati ta objekt sam in nasploh produktivno razširiti spekter raziskovanja.

Podobno velja tudi za konstrukcije z ravnilom in šestilom v evklidski geometriji. Tam postavimo pravila sistema za konstrukcijo geometričnih objektov. Nato pa lahko poleg njih samih raziskujemo tudi izrazljivost sistema samega. Izrazljivost tukaj sovpade z konstruktibilnostjo. Opazujemo lahko tudi, kako spreminjanje pravil

(npr. če dovolimo prepogibanje papirja ali t. i. *neusis* konstrukcije z vrtenjem ravnila glede na dano točko) spreminja izrazljivost sistema. A vendar je trajalo dolgo, preden smo dobili dokaze o nekonstruktibilnosti določenih likov (npr. pravega sedmerokotnika) znotraj pravil evklidske konstrukcije.

Še en primer iz zgodovine izrazljivosti je omejitev pojma gibanja v aristotelski fiziki na enakomerno in deformirano gibanje. Objekti (npr. planeti) se lahko gibljejo enakomerno, toda vse druge vrste gibanja so deformirane in tako nihanje ter trki padejo v isto kategorijo deformiranega gibanja. Srednjeveški fizik Oresme je bil zato v svojih raziskavah gibanja primoran v okorne formulacije enakomerno deformiranega gibanja, kar je kasneje postalo znano kot enakomerno pospešeno gibanje (Kuhn and Hacking 2012).

Vprašanje pospeška je seveda povezano tudi z vprašanji matematične analize in zgodovine pojma infinitezimalov. Tudi ti pojmi so bili predmet številnih filozofskih razprav – podobno kot iracionalna in imaginarna števila. A za razliko od slednjih infinitezimali kot taki kljub svoji uporabnosti in zanimivosti, niso prešli v kanon števil, saj je bilo mogoče teorijo odvodov in integralov formalizirati tudi brez njih. Kljub temu smo v 60ih na podlagi hiperrealnih števil dobili t. i. nestandardno analizo. Hiperrealna števila predstavljajo razširitev pojma števil, ki vključuje infinitezimale, in prav tako omogoča formalizacijo osnovnih pojmov analize, brez okornih epsilon-delta postopkov.³

Slovit primer rezultata o izrazljivosti matematičnih sistemov je tudi Gödlov dokaz o nepopolnosti. Parafrazirano z vidika izrazljivosti

3 Filozofsko analizo debat o infinitezimalnih v navezani na nedavno formalizacijo hiperrealnih števil najdemo v Hamkisonovi alternativni zgodovini matematike, ki bi lahko vodila v aksiomatizacijo hipoteze o kontinuumu (Hamkins 2024). Hiperrealna števila pa niso edina pot k alternativam klasični analizi. Računalniški sistemi odvajanja se lahko zanašajo tudi na tkim. dualna števila, kjer podobno kot pri imaginarnih številih uvedemo imaginarno enoto $i^2 = -1$, namesto tega uvedemo dualno število $\epsilon^2 = 0$.

bi lahko rekli, da sistemi, katerih izrazna moč dopušča običajno aritmetiko, ne morejo biti hkrati konsistentni in popolni (se pravi, ali bo iz aksiomov sistema mogoče dokazati protislovje ali pa bodo poleg dokazljivo resničnih stavkov obstajali še nedokazljivo resnični stavki). Tovrstni dokazi niso zanimivi le za vprašanja izrazljivosti znotraj matematike, temveč tudi povratno vplivajo na pojem matematike. V tem primeru vidimo, da je povezava med resničnostjo in dokazljivostjo, ki je pred tem dokazom veljala kot predpostavka, dejansko odvisna od izrazne moči sistema, o katerem razmišljamo.

Zgodovino izrazljivosti lahko prav tako opazujemo na področju tehnologije. Poleg orodij, ki so neposredno povezana z matematiko, ali kot modeli za lažje računanje, npr. abak, ali kot povod za matematično idealizacijo, npr. ravnilo in šestilo, so zobniki dober primer področja izrazljivosti v tehnoloških objektih. Z različnimi velikostmi zobnikov lahko izrazimo množenje s konstanto ter seštevanje in odštevanje. A pomembna omejitev sistemov zobnikov je, da so te operacije vedno modularne zaradi rotiranja. Z dodatnimi razširitvami dovoljenih elementov (npr. zobniki z ekscentrično osjo) lahko njihovo izrazljivost povečamo (Cockshott, Mackenzie, and Michaelson 2015). Tukaj najdemo med drugim ure, antiktermi mehanizem in Babbageove stroje. Kljub jasnim začetnim omejitvam ni očitno, kje so meje izrazljivosti tovrstnih mehanizmov. In tako kot pitagorejska razmerja so tudi tovrstni mehanizmi doživeli svoj metafizični obrat in postali kriterij razumevanja v novoveški fiziki in filozofiji.

Na področju splošnega pojma strojev lahko prav tako najdemo poskuse teorij, navdahnjene z analogiziranjem z izrazljivostjo. En poskus predstavlja ideja enostavnih strojev, s sestavljanjem katerih bi dobili kompleksne stroje. Nabor preprostih strojev bi tako omejeval možne kompleksne stroje in torej meje strojne izrazljivosti. Z vprašanjem te klasifikacije so se ukvarjali že starogrški strojniki kot sta Arhimed in Heron Aleksandrijski. Končen nabor je predstavl-

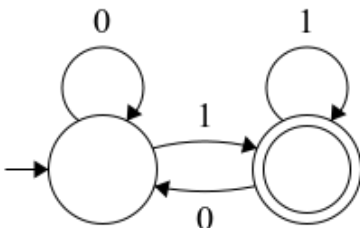
jalo sedem strojev, ki nudijo mehansko prednost, temelječo na ravnovesju sil (vzvod, škripec, vijak, kolo na osi, zagozda in - šele v renesansi - klančina). Na tem področju nam je Galileo podal tudi dokaz, da enostavni stroji energijo le transformirajo, ne morejo pa je ustvariti. Z razvojem termodinamike ta dokaz o nezmožnosti dobi kronsko posplošitev v dokazu trditve, da ne obstaja *perpetuum mobile*. Pomemben nadaljnji korak v nalogi kategorizacije strojev je opravil Reuleaux. V njegovi sistematizaciji, ki je utemeljila kinematiko kot vedo, osnovni element ni strojni objekt, temveč elementarna povezava med členoma, ki se veriži v stroj.

Morda najbolj nazoren prikaz mišljenja s pomočjo izrazljivosti najdemo v zgodovini računalništva, kjer še posebej teorija izračunljivosti ponuja verjetno najbolj razdelano teorijo izrazljivosti na nekem področju. Pregovorno se začne s Turingovim dokazom o neizračunljivosti zaustavitvenega problema. To pomeni, da je zaustavitveni problem – tj. vprašanje, ali bo dani program z nekim vnosom prišel do točke, kjer se bo ustavil, ali pa se ne bo nikoli ustavil – neizračunljiv, se pravi, da za to nalogo ni mogoče napisati programa, ki bi za katerikoli program in vnos vnaprej povedal, ali se bo ustavil ali ne. Ta del zgodbe o računanju je za temo izrazljivosti relevanten z več vidikov. Dokaz sam lahko razumemo kot izrek o izrazljivosti možnih programov. Idejo programa, ki bi rešil zaustavitveni problem, je seveda mogoče formulirati, vendar dokaz pokaže, da je tak program glede na dani pojem računanja nemogoč in torej očitno neizrazljiv.

Nadalje je zanimivo, da so bile v tistem času poleg Turingove podane še druge eksplikacije pojma računanja. Vprašanje eksplikacije pojma računanja v tej obliki sicer sega vsaj do Hilbertovega vprašanja o natančni definiciji algoritma leta 1900. Poleg Turingovega stroja so bili predlagani še Churchev lambda račun, Postov stroj in Gödlove rekurzivne funkcije ter drugi. Zanimivo je, da so se

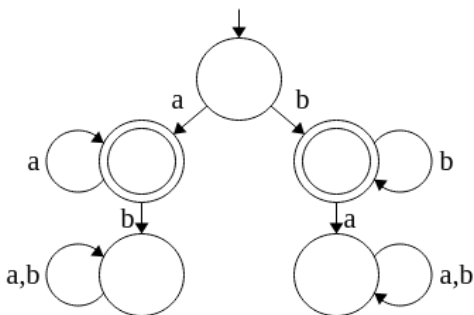
ti različni in relativno sočasno predlagani modeli izkazali za ekvivalentne (Sipser 2013). Glede na eksplikacijo pojma je situacija tukaj torej obratna od prej omenjenega problema interpretacije verjetnosti, kjer smo za en formalizem iskali – in našli – različne interpretacije. Presenetljivo dejstvo, da so se predlagani modeli računanja izkazali za ekvivalentne, je utrdilo idejo o pravilnosti te eksplikacije. Dejansko zaradi nujne nenatančnosti (Carnap 1971) procesa eksplikacije običajno nenehno prihaja do novih poskusov, ki vzpostavljajo različne precizacije istega izhodiščnega pojma. Tako lahko v znanosti in strojništvu najdemo pojme z istimi imeni, a različnimi eksplikacijami, primernimi za različna področja, denimo pojma »sile« ali »trdnosti« na različnih redih velikosti pogosto nista eksplicirana enako kot njuni sinonimi v ostalih razmerah.

Poleg nenavadnega ujemanja glede eksplikacije pojma računanja, teorija računanja podaja še druge primere za krepitev intuicije pri razmišljanju o izrazljivosti. Sodobni učbeniški prikazi teorijo računanja predstavijo kot zaporedje različnih sistemov – parov strojev in jezikov – z naraščajočim obsegom možnih izrazov oz. vedno večjo izrazljivostjo. V tem primeru so stroji idealizacije različnih postopkov računanja omejeni na dana pravila in sredstva. Jeziki pa so množice zaporedij simbolov, npr. „10010“, ki jih ti stroji lahko prepoznajo ali ne. Zmožnost prepoznavanja nekega jezika je odvisna od pravil in sredstev, ki opredeljuje dani stroj. Od tod vzporedna hierarhija med stroji in jeziki. Spreminjanje teh pravil in sredstev, ki opredeljujejo stroje, pa spreminja njihovo računsko in z njo povezano izrazno moč.



Primer končnega avtomata, ki sprejme vsa zaporedja ničel in enk, ki se končajo z 1. Dano zaporedje preveri tako, da začne v začetnem stanju (krog označen z neimenovano puščico), nato za vsak simbol v zaporedju prehaja med stanji, tako da sledi puščici, označeni z ustreznim simbolom. Če se zaporedje konča, ko je v sprejemnem stanju (označeno z dvojnim krogom), stroj sprejme zaporedje. Postopek za zaporedje »101« bi torej začel v začetnem stanju, nato bi se prestavil v sprejemno stanje, nato spet v prvo stanje in nazadnje nazaj v sprejeto stanje.

Sodobna sinteza področja (Sipser 2013) to snov predstavi kot zaporedje vse bolj kompleksnih idealnih računskih strojev in njim pripadajoč vedno bolj izrazljiv razred jezikov. Izhodiščni model računanja so končni avtomati. Zanje velja, da imajo vnaprej določeno končno mnogo stanj, ki jih lahko zasedejo. Onkraj tega nimajo posebnega spomina. Zaporedja simbolov prepoznavajo posamično, enosmerno in po vrsti. Njihova pravila morajo za vsako stanje vsakega simbola (iz končne »abecede«) opredeliti naslednje stanje, ki ga stroj zavzame. Če se stroj na koncu zaporedja nahaja v stanju sprejetja, to razumemo kot dejstvo, da je stroj sprejel zaporedje znakov. Jeziki takih strojev so lahko, npr. vsa zaporedja, ki se končajo z »1«, ali vsebujejo podzaporedje »pixelpoint« ali se začnejo z »www« in končajo z »org«.



Primer končnega avtomata, ki sprejme vsa zaporedja, ki vsebujejo zgolj simbole »a« ali samo »b«.

Obstajajo pa »jeziki«, za katere ni mogoče skonstruirati končnega avtomata. Tak je na primer jezik vseh palindromov, tj. zaporedji, ki so enaka, če jih beremo iz leve ali desne; ali pa jezik zaporedij, ki imajo enako število ničel in enk. Pravila za te lahko izrazimo s potisnimi avtomati, ki so podobni končnim, vendar imajo preprost, a načeloma neskončen spomin, na katerega lahko »potiskajo« simbole in v vsakem stanju preberejo samo zadnji simbol iz spomina. S tem se izrazljivost torej poveča, vendar ne toliko, da bi prišli do izrazljivosti Turingovega stroja in torej tudi tega, kar se običajno razume pod pojmom računanja. Potisni avtomati tako ne bi mogli prepoznati že vseh zaporedij treh različnih simbolov, prav tako pa ne takšnih, katerih prepoznavanje bi zahtevalo eksponentno štetje.

Turingov stroj nazadnje sestavimo z neskončnim trakom, na katerem je dano (končno) zaporedje, ki ga želimo sprejeti ali zavreči, stroju pa omogočimo, da se lahko prosto premika po traku, bere, zapisuje in prepisuje simbole. Na tej točki je težko najti primere nalog, za katere ne bi mogli sestaviti Turingovega stroja, še težje pa take, za katere lahko dokažemo, da je to nemogoče. Prvi tak

primer je bil ravno Turingov zgoraj omenjen dokaz o neizračunljivosti zaustavitvenega problema.

Enakost med različnimi modeli računanja pa je za razmišljanje o izrazljivosti predstavljala tudi določeno zagato. Z razvojem programskih jezikov so med njimi nastale razlike, podobne tistim med različnimi zgoraj omenjenimi modeli računanja. Vsi programski jeziki, tako kot zgoraj navedeni modeli računanja, so po izrazni moči v pravkar obravnavanem smislu večinoma enaki Turingovemu stroju. Toda ta zelo splošna enakost in z njo povezana hierarhija izrazljivosti nista dopuščali natančnejših razmišljanj o razlikah, npr. znotraj razredov sicer enake računske izrazljivosti. Za te razlike se je zdelo, da vplivajo na izrazno moč programskih jezikov v drugih vidikih, ki niso neposredno vezani na obseg izračunljivosti. Sem spadajo, denimo, vprašanje kaj in kako je mogoče konstruirati znotraj danega jezika ter kako se obseg izrazljivosti spreminja, če mu dodajamo in odvezemamo posamezne lastnosti. Na primer, jezik, ki ima zanko »for«, ne pa zanke »while«, bo – če mu dodamo sledjo – pridobil na izrazljivosti, toda obratna situacija ni mogoča, saj lahko zanko »for« izrazimo z zanko »while« (Felleisen 1991). Tovrstna vprašanja lahko zastavljamo tudi o bolj jedrnih vprašanjih, ki so povezana z razlogi za obstoj različnih paradigem programiranja in bi potrebovala globlji razmislek o pojmu enakosti in enake izrazljivosti, ki je onkraj obsega tega eseja. Področje, ki se je razvilo okrog takšnih vprašanj, lahko imenujemo formalna semantika programskih jezikov (Winskel 2001) in je še danes polno odprtih vprašanj.

Ta primer zaključuje seznanitev s področjem izrazljivosti, katere namen je bil – poleg hitrega povzetka zgodovine izrazljivosti – tudi vzpodbuditi intuicijo za prepoznavanje ovir, orodij in premikov na tem področju, kakor tudi občutka za to, kako je lahko videti dokaz za nezmožnost neke konstrukcije znotraj določenega sistema.

Viri

- Carnap, Rudolf. 1971. *Logical Foundations of Probability*. London: Univ. of Chicago Press.
- Carus, A. W. 2007. Carnap and Twentieth-Century Thought: Explication as Enlightenment. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press.
- Cockshott, William Paul, Lewis M. Mackenzie, in Greg Michaelson. 2015. *Computation and Its Limits*. Oxford: Oxford University Press.
- Felleisen, Matthias. 1991. "On the Expressive Power of Programming Languages." *Science of Computer Programming* 17 (1–3): 35–75. [https://doi.org/10.1016/0167-6423\(91\)90036-W](https://doi.org/10.1016/0167-6423(91)90036-W).
- Gillies, Donald. 2000. *Philosophical Theories of Probability*. Philosophical Issues in Science. London ; New York: Routledge.
- Hamkins, Joel David. 2024. "How the Continuum Hypothesis Could Have Been a Fundamental Axiom." arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.02463>.
- Kuhn, Thomas Samuel, in Ian Hacking. 2012. *The Structure of Scientific Revolutions*. 4th izd. Chicago: University of Chicago press.
- Sipser, Michael. 2013. *Introduction to the Theory of Computation*. Third edition, International edition. Cengage Learning.
- Winskel, Glynn. 2001. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. 5. printing. Foundations of Computing. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Jan Kostanjevec
Sprehod po prostoru izrazljivosti



Založnik: Aksioma – Zavod za sodobne umetnosti, Ljubljana
www.aksioma.org | aksioma@aksioma.org

Zanj: Marcela Okretič

© Aksioma | Avtorske pravice besedila in slik so last avtorja
Ljubljana, april 2025

Esej je nastal za *PXXP-XXV: Spekulacija in razkroj*, 25. mednarodni festival sodobnih umetniških praks Pixxelpoint, ki sta ga soorganizirala (2024) Kulturni dom Nova Gorica in Aksioma – Zavod za sodobne umetnosti, Ljubljana v okviru Evropske prestolnice kulture GO! 2025 Nova Gorica – Gorica.

www.pixxelpoint.org/2024